



А. Триъгълни числа. Да разгледаме дадените тук фигури или по-добре да наредим разпръснатото на масата известен брой еднакви по размер медни или никелови монети; ще се убедим, че като образуваме от тях триъгълници, броят на монетите, които ще са ни нужни за нареждане на все по-големи триъгълници, е подчинен на известни постоянни правила на образуване. Такива числа наричаме *триъгълни числа*.

The image shows five triangular arrangements of dots, each representing a triangular number. The first arrangement has 1 dot, the second has 3 dots, the third has 6 dots, the fourth has 10 dots, and the fifth has 15 dots. The numbers 1, 3, 6, 10, and 15 are written below their respective dot patterns.

	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	(1)
Триъгълни числа	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	(2)
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120	

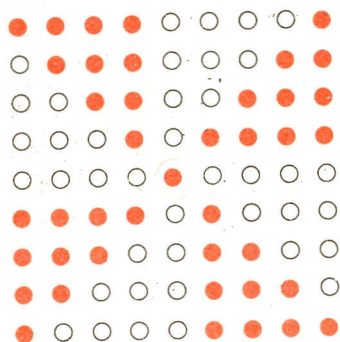
$$\frac{n(n+1)}{2},$$

От това произлиза интересно по-нататъшно наблюдение. *Всеки квадрат на число от естествения ред се равнява на сбора от двете съседни триъгълни числа*, а именно — стоящото непосредствено под него и предходното число (стоящото от лявата му страна).

И Т. Н.

Квадратни числа	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	(1)	
	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	(2)
	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	

Квадратните числа ще бъдат естествено квадратите на последователните числа от естествения ред. Оттук именно възниква познатото ни вече твърдение, че *сборът от последователните нечетни числа се равнява на квадрата от техния брой.*



Горната фигура е графично изображение на прочутата теорема на Диофант, че *осмократно взетото триъгълно число, увеличено с единица, представлява винаги квадрат.*

За да проверим дали дадено число n е триъгълно, достатъчно е да проверим дали числото $8n + 1$ е пълен квадрат; например

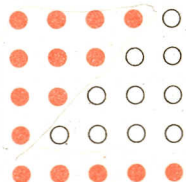
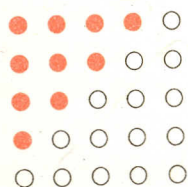
$$8 \cdot 66 + 1 = 529 = 23^2,$$

следователно 66 е триъгълно число.

Друга теорема гласи, че *всяко квадратно число се равнява на сбора от триъгълното число, заемащо същото място, и от предходното му число.*

(Вж. долните фигури и табличката.)

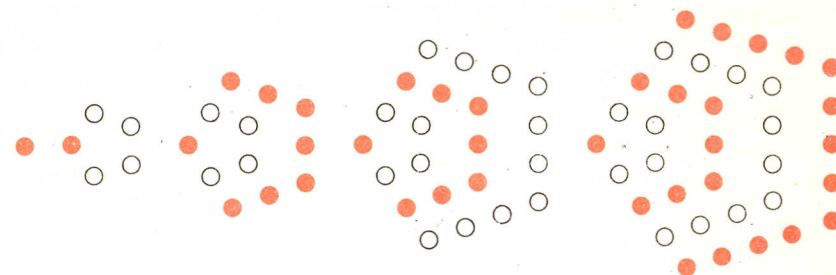
Естествен ред на числата	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Триъгълни числа	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78
Квадратни числа	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144



И накрая трета теорема гласи така: *Всяко квадратно число се равнява на поредния номер на мястото, на което стои, увеличен с удвоеното триъгълно число, заемащо предходното място.*

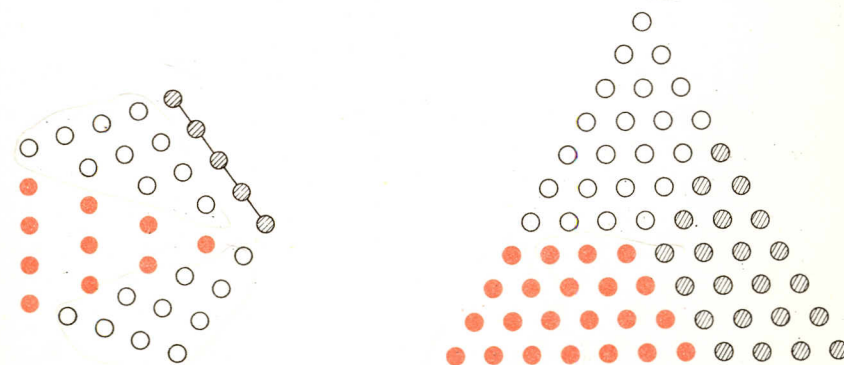
В. Петовъгълни числа. И тези многоъгълни числа се образуват също като предходните, но чрез поставяне на тройки в най-горния ред:

	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
Петовъгълни числа	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34
	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176	210



Тези числа са дали също тъй подтик да се формулират няколко доста интересни закономерности.

1. *Петовъгълното число се равнява на поредния номер на мястото, на което стои, увеличено с утроеното триъгълно число, заемащо предходното на него място.*



2. *Петовъгълното число представлява сбор от триъгълното число на същото това място и удвоеното предходно на него триъгълно число.*

3. *Утроеното петовъгълно число представлява триъгълно число.*

Следователно, за да проверим дали дадено число, например 22, е петовъгълно число, достатъчно е да го умножим на 3 и да намерим произведението в поредицата триъгълни числа.

Оттук също тъй лесно е да се направи изводът, че петогълното число не може да завършва на 3, 4, 8 и 9, тъй като при умножението на 3 в единиците на произведението би се паднало 9, 2, 4, 7, а тези цифри не ги намираме в края на тригълните числа.

4. *Петогълното число се равнява на квадрата от своя пореден номер, увеличен със сбора на числата на всичките предходни места, или по-накъсо: петогълното число се равнява на квадрата от своя пореден номер + тригълното число, заемащо предходното място.*

Например деветото място се заема от петогълното число 117, следователно $117 = 9^2 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$; но сборът от първите осем числа от естествения ред възлиза на 36 и това число е тригълното число, стоящо на 8-о място, т. е.

$$117 = 9^2 + 36.$$

Петогълни числа може да се образуват с помощта на следната таблица:

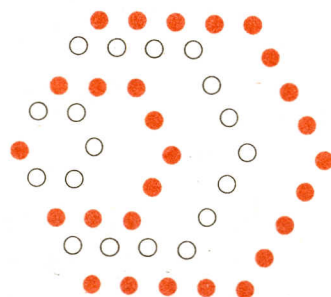
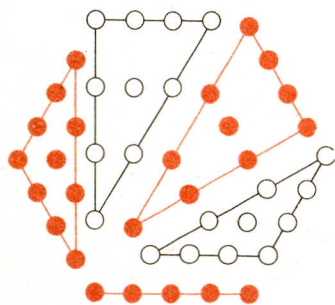
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7
1	2	3	4	5	6	7

$$\begin{aligned} 1 & \\ 1 + 2 \cdot 2 &= 5 \\ 1 + 2 + 3 \cdot 3 &= 12 \\ 1 + 2 + 3 + 4 \cdot 4 &= 22 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \cdot 5 &= 35 \\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 \cdot 6 &= 51 \\ \text{и т. н.} \end{aligned}$$

Изобщо:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n^2 = \text{петогълно число.}$$

Г. *Шестогълните числа* се образуват, както всички предходни, само че за основа се приема числото 4.



Шестогълни числа	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	1	5	9	13	17	21	25	29	33	37	41	45		
	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231	276		

(1)
(2)

1. *Шестогълното число е равно на своя пореден номер, увеличен с учетвореното тригълно число, заемащо предходното място.*
2. *Шестогълното число се състои от тригълното число със същия пореден номер и утроеното предходно тригълно число.*

3. *Шестогълните числа са идентични с тригълните числа, заемащи нечетни места.*

Д. *Обобщение.* Въз основа на по-горните изводи може да се установят както общ начин за образуване на многогълните числа от ред k , така и основните закономерности за отношението на тези числа към тригълните числа, именно:

Поредица многогълни числа от ред k се получават посредством по-горе посоченото косо сумиране на цифрите, като се вземе за основа в първия ред поредица от еднакви числа, равни на $k-2$.

Положение I. Всяко многогълно число от ред k се равнява на своя пореден номер + тригълното число от предходното място, взето $(k-2)$ пъти.

Положение II. Всяко многогълно число от ред k се равнява на тригълното число, стоящо на същото място + тригълното число от предходното място, взето $(k-3)$ пъти.

Таблица на многогълните числа

Място	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Тригълни числа	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Квадратни числа	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Петогълни числа	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Шестогълни числа	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Седмогълни числа	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235
Осмогълни числа	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280
Деветогълни числа	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325
Десетогълни числа	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370

Тази таблица, разглеждана по колонки, дава възможност за интересни заключения, които обаче оставяме да направи наблюдателният читател.

*

2. Пирамидални числа

Да си представим, че от десет стъклени топки сме образували тригълник. Върху тези топки можем да образуваме като втори пласт тригълник от шест топки, след това — като трети пласт тригълник от три топки и накрая — като четвърти пласт една топка.